Esercizi al Borromeo

1. Esercizio sul duopolio *à la* Stackelber (asimmetrico)

Supponiamo che su di un mercato *à la* Stackelberg con curva di domanda inversa *P*(*q*) = 10 - *q*, dove *q* è la quantità totale immessa sul mercato, l’impresa *follower* abbia funzione di costo *Cf*(*qf*) = 2*qf*, mentre la funzione di costo dell’impresa *leader* risulti *Cl*(*ql*) = *ql* (*q* = *ql* + *qf*). Si scriva la funzione di reazione dell’impresa *follower*, la si rappresenti graficamente e si determini l’equilibrio di Nash perfetto rispetto ai sottogiochi del suddetto gioco sequenziale.

**Soluzione**. La curva di reazione dell’impresa *follower* risulta *qf*N(*ql*) = 4 - *ql*/2 (ottenuta massimizzando *πf* = *P*(*q*)*qf* - *Cf*(*qf*) rispetto a *qf*), e questa è anche l’unica strategia perfetta rispetto ai sottogiochi del *follower*. Utilizzandola per riscrivere la funzione di *payoff* del *leader* in forma ridotta si ottiene *πl* = *P*(*ql* + *qf*N(*ql*))*ql* – *Cl*(*ql*) = (5 - *ql*/2)*ql*. Massimizzando rispetto a *ql* si ottiene *qlN* = 5, che è la strategia perfetta rispetto ai sottogiochi dell’impresa *leader* (*qfN*(5) = 3/2).

1. Esercizio sulla lotteria/torneo *à la* Tullock

Supponiamo che due imprese possano effettuare investimenti in ricerca per ottenere un certo brevetto. Il valore monetario del brevetto sia normalizzato a 1 per entrambe le imprese, mentre il costo monetario dell’investimento *I* sia *C*1 = *I*1 per l’impresa 1 e *C*2 = *I*2/2 per l’impresa 2. Sia infine la probabilità di ottenimento del brevetto da parte dell’impresa *i* data da *Ii*/(*Ii* + *Ij*) (*i*, *j* = 1,2, *i* ≠ *j*). Si scrivano le funzioni di *payoff* delle imprese, se ne determinino le funzioni di risposta ottima e si calcoli l’equilibrio di Nash in termini di investimenti effettuati e probabilità di successo.

**Soluzione**. Le funzioni di *payoff* delle imprese risultano *π*1 = *I*1/(*I*1 + *I*2) - *I*1 e *π*2 = *I*2/(*I*1 + *I*2) – *I*2/2, perciò le curve di reazione, ottenute massimizzando rispetto al proprio investimento, sono date da *I*1\*(*I*2) = $\sqrt{I\_{2}}-I\_{2}$ e *I*2\*(*I*1) = $\sqrt{2I\_{1}}-I\_{1}$. Risolvendo il sistema si ottiene *I*1*N* =2/9, *I*2*N* =4/9, con una probabilità di ottenimento del brevetto di equilibrio per l’impresa 1 pari a 2/9/(2/9 + 4/9) = 1/3.